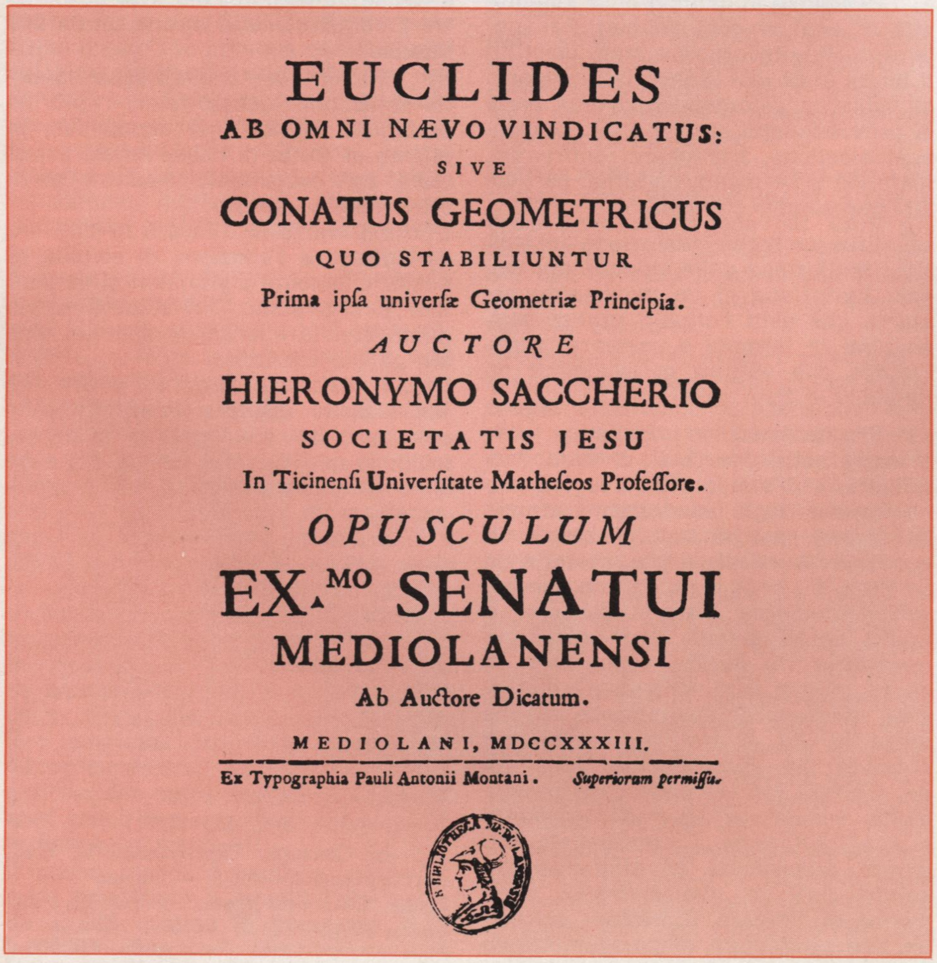
LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

di Graziella Frá

La costruzione delle geometrie non euclidee è partita dal tentativo di dimostrare la validità assoluta delle geometrie euclidee. Il quinto postulato di Euclide è il cardine della geometria classica: soltanto sostituendolo con postulati alternativi si hanno due geometrie non euclidee tanto valide quanto quella antica.

Fig. 1 *Frontespizio della famosa opera di Saccheri: il primo testo nel quale, nel tentativo di dimostrare il quinto postulato di Euclide e quindi la validità assoluta della sua geometria, viene costruita un'ampia parte di geometria non euclidea.*



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiſſu.

Lo studio di come i matematici siano progressivamente arrivati a concepire e costruire geometrie non euclidee è un'occasione unica nella storia della matematica per comprendere come questa scienza sia strettamente concatenata al modo di pensare filosofico, politico e sociale dell'umanità. Non vi è anzi miglior approccio alla descrizione delle geometrie non euclidee che spiegando quella che è stata dapprima la filosofia degli ideatori della geometria euclidea e successivamente quella degli ideatori delle geometrie che l'hanno superata. Come si sa, nozioni che potremmo definire con sicurezza geometriche erano già in possesso di popolazioni preistoriche e, in gran numero, anche degli Egiziani, all'alba dell'epoca storica. Tali nozioni rivestivano un'importanza fondamentale nell'agrimensura e per la compilazione del calendario.

Talete e Platone

Tuttavia non si pensava ancora che la geometria fosse una scienza: fu Talete che per primo le diede tale dignità. Egli, dalla Grecia, era passato in Egitto, dove s'impadronì delle cognizioni di geometria di questo paese, riuscendo ad organizzarle in un sistema già abbastanza moderno. Fu lui a proporre la struttura della dimostrazione, a riconoscere la differenza fra postulati, teoremi e problemi, ad introdurre la famosa formula con cui ancor oggi finiscono i teoremi: « come volevasi dimostrare ».
Anche per Talete, però, la geometria rimase la scienza di alcuni enti semplici la cui esistenza è suggerita da enti di carattere fisico: così il triangolo della geometria è l'astrazione di un triangolo reale, per esempio, di un campo di forma triangolare; la retta è l'astrazione dello spigolo in cui s'incontrano le due superfici piane, non parallele, che delimitano una parte del volume di un solido. Questo, del resto, non è un approccio errato alla definizione degli enti geometrici, soprattutto per renderli intuitivi allo studente di matematica ed è una via che si segue anche oggi, quando si vogliono insegnare nelle scuole elementari e medie i fondamenti della geometria.
Dopo Talete, spetterà a Platone e ai suoi discepoli « scoprire » la geometria, nel senso che questa scienza ai loro oc-

chi sembra avere la proprietà, superiore a quella di ogni altra scienza, di poter ragionare su astrazioni degli enti reali e trarre conclusioni vere senza far alcun ricorso all'esperienza. Un triangolo, per esempio, è l'astrazione di un oggetto materiale; la geometria, impiegando semplicemente la logica deduttiva, permette di definire proprietà del triangolo e quindi, in particolare, degli oggetti di forma triangolare che sono vere per tutti gli oggetti dotati di questa forma; questa verità è stabilita senza alcun artificio sperimentale, per esempio, senza la necessità di ricorrere a misure. È evidente che nessun'altra scienza — nemmeno una scienza speculativa — ha la possibilità di operare in modo così rigoroso ed astratto. Platone considera dunque la geometria una scienza superiore, sublime, e il suo punto di vista verrà subito ripreso dai matematici, i quali ne resteranno influenzati per duemila anni: la geometria raggiungerà così un grande stato di perfezione, che però non riuscirà a superare.

Questa convinzione che la geometria debba operare su astrazioni di qualcosa di reale, deducendo conclusioni che non dovranno mai essere in contrasto con la realtà fisica (o per lo meno, mai in contrasto troppo aperto) verrà detta « punto di vista platonico ». Ve ne è un secondo, quello della matematica moderna, che costituisce il superamento del precedente e che viene detto « punto di vista strutturalistico », secondo il quale una scienza logico-deduttiva, come la matematica e, in particolare, la geometria, è vera e valida in quanto sono veri e validi l'insieme degli assiomi di partenza e il gruppo di proposizioni che se ne traggono per mezzo della logica. Se si cambia l'insieme degli assiomi di partenza, cambiano anche le conclusioni, e ciò non significa né che siano veri i primi e false le seconde né il contrario. Ciò che conta nella matematica e soprattutto nella geometria è dunque la struttura logico-deduttiva del sistema che ha come punto di partenza il gruppo degli assiomi e come punto d'arrivo l'insieme delle proposizioni da questi dedotte. Anzi, secondo la costruzione portata avanti da Hilbert nella sua famosa opera *I fondamenti della geometria*, gli assiomi e le proposizioni derivatene si riferiscono ad enti dei quali non è data una definizione costante e che di volta in volta possono essere cambiati. Quanto sia valido questo punto di vista è dimostrato dall'impiego del principio di dualità che viene usato nella geometria proiettiva, nella quale ogni teorema valido per una figura costituita di punti e di rette lo è altrettanto per una figura derivata dalla precedente scambiando i punti con rette e le rette con punti. Ciò che conta, dunque, nei teoremi della geometria proiettiva è la struttura della dimostrazione del teorema e non gli enti particolari ai quali il teorema viene applicato. La storia delle geometrie non euclidee è in sostanza la storia del superamento del punto di vista platonico e della costruzione del punto di vista strutturalistico.

Perfezione del sistema euclideo

I matematici greci giunsero a possedere un numero di nozioni geometriche molto superiore a quello degli Egiziani. Queste conoscenze vennero ordinate da Euclide, il quale nel III secolo a.C. compose un'opera fondamentale, i celebri *Elementi*, tuttora di enorme importanza; infatti essi non solo costituiscono il compendio della geometria greca ma, soprattutto, l'autore vi ordina la sua geometria a partire dagli assiomi, nella cui presentazione egli fa uso di numerosi termini derivati dal linguaggio comune. Così la sua definizione II dice: « linea è una lunghezza senza larghezza », e la definizione IX: « angolo piano è l'inclinazione reciproca di due rette ». I concetti, nonostante l'impiego delle parole correnti, sono chiari e gli enti del mondo reale cui fanno riferimento possono essere interamente dominati dai sensi e dall'intuizione dell'uomo. Così è per tutti gli assiomi da cui Euclide parte per la ricostruzione delle nozioni geometriche possedute dai Greci. Uno dei fondamenti di questa costruzione perfetta è costituita dal postulato V (che nei codici di alcuni trascrittori è però riportato anche come assioma XI), che è, praticamente, la chiave di volta di tutto il sistema euclideo e dice: « se una retta, ne incontra altre due e la somma degli angoli interni da una medesima parte è minore di due angoli retti, le due rette, prolungate all'infinito, s'incontreranno dalla parte dalla quale si trovano i due angoli con somma minore di due retti ».

Sorge, ora, una difficoltà: il postulato II afferma, invece, che la retta ha lunghezza infinita; ammesso questo postulato, il V nella forma proposta da Euclide equivale ad affermare che per un punto dato si può condurre ad una retta data una ed una sola parallela, cioè una retta complanare con quella data e che non la incontri mai. Per questo motivo il V postulato di Euclide viene detto anche il « postulato delle parallele ». Come mai esso è stato presentato dal matematico nella forma precedente invece che in quella che gli ha valso la denominazione più appropriata? Se si indaga il motivo di questa scelta, si riesce a ricostruire il processo intellettuale che ha occupato la mente di Euclide per dissipare quei dubbi sull'opportunità di introdurre proprio quella proposizione fra gli assiomi enunciati dallo scienziato stesso. Infatti la forma alternativa del postulato implica in sostanza l'affermazione che di tutte le infinite rette passanti in un piano per un punto posto fuori di una retta data ve n'è una ed una sola che non incontra mai la retta data, per quanto prolungata all'infinito. Ora quest'affermazione significa impegnare un concetto non verificabile con i sensi e con l'intuizione, poiché s'introduce un'estrapolazione che impegna una regione del piano (quella a distanza infinita) non direttamente accessibile all'osservazione dell'uomo. D'altronde, in tutta la matematica greca e, in particolare, in Euclide i postulati asseriscono la possibilità di una costruzione geometrica: i Greci, per esempio, non sentivano la necessità di dimostrare un teorema in astratto, quando si conoscesse nella pratica una costruzione con riga e compasso in grado di dimostrare l'esistenza dell'ente geometrico. Ecco dunque che Euclide sceglie fra le due forme del postulato quella enunciata sopra, che implica l'attenzione solo ad una parte prossima e non remota della superficie piana. Però, se le due forme sono equivalenti ma l'una impegna delle possibilità di osservazione e intuizione discutibili, mentre l'altra è costretta a rinunciare all'ammissione esplicita dell'esistenza di una sola parallela, ciò significa che nell'enunciazione del postulato V vi è qualcosa che lo tiene lontano dal concetto di verità assoluta.

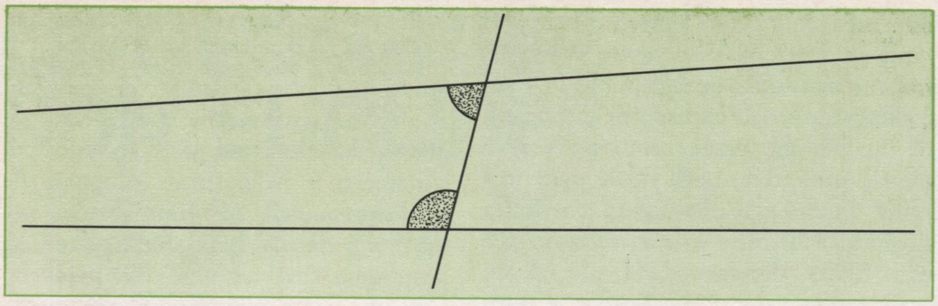
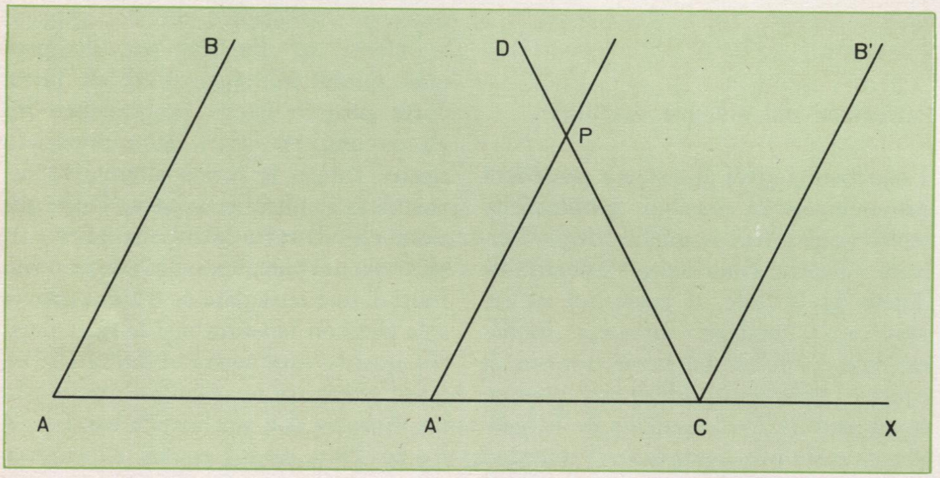


Fig. 2 *Lo schema che illustra il quinto postulato di Euclide: se due rette sono intersecate da una terza, esse si incontrano dalla parte in cui formano con la secante angoli con somma inferiore a due retti.*

Fig. 3 *Il matematico inglese F. Wallis tentò di sostituire il quinto postulato di Euclide con un altro che asserisce l'esistenza di una qualunque figura simile a una data (in particolare un triangolo). I due postulati sono però equivalenti e quello di Wallis non dà alcun valore assoluto alla geometria euclidea.*



La critica a Euclide

Quel best-seller che furono gli *Elementi* di Euclide per duemila anni non poté evitare di avere una folta schiera di commentatori. Questi si accorsero ben presto delle difficoltà che avevano portato Euclide alla scelta di cui abbiamo parlato e, nella presuntuosa ipotesi che esse fossero dovute ad un'insufficiente elaborazione di Euclide piuttosto che di una particolare concezione della geometria, tentarono di eliminarle seguendo tre vie differenti. La prima fu quella di sostituire la definizione di rette parallele con un'altra che semplificasse il v postulato: così le rette venivano definite complanari e sempre fra loro equidistanti. Era però un errore, in quanto questa non era una definizione, ma un postulato, il postulato dell'effettiva esistenza di rette complanari ed equidistanti, anche se prolungate all'infinito. La seconda via fu quella di tentare di sostituire il postulato nella forma proposta da Euclide con una forma diversa. Una terza fu quella di cercare di trasformarlo in un teorema, cioè di dimostrarlo per mezzo di tutti gli altri assiomi. Mentre le prime due vie non portarono a nulla di nuovo rispetto ai ragionamenti di Euclide, la terza era destinata al fallimento in partenza, perché il gruppo di assiomi scelti da Euclide è completo, nel senso che un gruppo di assiomi da cui si può partire per giungere a una costruzione matematica non deve contenerne alcuno derivabile da altri, altrimenti questo farebbe già parte dei teoremi successivamente deducibili e non delle nozioni implicite nel punto di partenza.
Sin verso la fine del '600 nessun commentatore di Euclide propone alcuna idea costruttiva per il superamento delle difficoltà presenti negli *Elementi*. Alla fine del XVII secolo e all'inizio del XVIII cominciano invece critiche più profonde. La prima è presentata dal matematico inglese J. Wallis (1616-1703), il quale nel 1663 tenne ad Oxford una conferenza, pubblicata solo trent'anni dopo, in cui proponeva di sostituire al v postulato quest'affermazione: « per ogni figura ne esiste un'altra ad essa simile e di grandezza arbitraria ». Applicata ai triangoli, essa può assumere questa forma: « esiste sempre un triangolo con gli angoli rispettivamente uguali a quelli di un altro triangolo dato, il cui lato comune ai due angoli dati abbia una lunghezza assegnata a piacere ». Come con una affermazione di questo genere si possa sostituire il v postulato di Euclide appare evidente dall'osservazione della figura 3. Due rette, *AB* e *CD*, formano con la trasversale *AC* due angoli α e γ la cui somma è minore di un angolo piatto. Ora spostiamo il punto *A* e con esso la retta *AB* in modo che questa risulti sempre parallela a se stessa. Pur di procedere abbastanza, il punto *A* verrà ad incontrare il punto *C*, cosicché la retta inizialmente in *AB* si troverà ora nella posizione *CB'*, risultando tutta interna all'angolo *DCX*. È evidente allora che per qualche posizione di *A*, come per esempio, *A'*, intermedia fra *A* e *C*, la retta che abbiamo trasportato incontrerà la *CD* in un punto, per esempio *P*. Se accettiamo l'ipotesi che esista un triangolo simile al triangolo *CA'P* e tale che i suoi lati stiano in rapporto a quelli di quest'ultimo come *CA : CA'*, se ne deduce che le rette *AB* e *CD* devono incontrarsi: questo è proprio quanto è richiesto dal v postulato di Euclide. La dimostrazione indica chiaramente come l'ipotesi dell'esistenza di un qualunque triangolo simile ad uno dato possa sostituire l'enunciazione del v postulato nella forma data da Euclide. Il punto di vista di Wallis è sicuramente originale, ma non si può dire che il suo postulato sia chiaro ed evidente per il successivo svolgimento della geometria quanto quello scelto ed enunciato da Euclide.

L'opera di Saccheri

Nel 1733 viene stampata a Milano un'opera del padre Gerolamo Saccheri (1667-1733), gesuita, nato a San-

remo; il titolo dell'opera è *Euclides ab omni naevo vindicatur*: *sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia*. Il « neo » principale a cui si riferisce l'autore è proprio quello del postulato v. Anche Saccheri si preoccupa di sostituire tale postulato con uno « più evidente ».

La tecnica con cui egli tenta di riuscirvi è questa: Saccheri ritiene valide le ventotto proposizioni che costituiscono il complesso di assiomi che precedono la geometria euclidea, manca però il v postulato, ed allora Saccheri fa l'ipotesi che esso sia falso e cerca di conseguenza di dedurre da questo e dai ventotto assiomi una conclusione da cui appaia evidente una contraddizione con la realtà, che obblighi ad accettare come vero il v postulato di Euclide. Questa tecnica dimostrativa lo porterà a sostituire quest'ultimo con nuove ipotesi. L'interesse della sua costruzione sta essenzialmente nel fatto che per la prima volta un matematico per dimostrare il postulato di Euclide o per giungere alla sua sostituzione con altri è costretto dalla tecnica di ricerca a costruire una catena molto complessa di teoremi la cui validità è al di fuori della geometria euclidea: cioè una nuova geometria. Saccheri considera un quadrangolo piano birettangolo *ABCD* (fig. 4), il quale ha inoltre il lato *AC* e il lato *BD* uguali; gli angoli retti sono quelli in $\widehat{A}$ e in $\widehat{B}$. Se dal lato *AB* s'innalza la perpendicolare nel punto medio *EF*, questa è l'asse di simmetria del quadrangolo, quindi è perpendicolare anche al lato *CD* nel suo punto medio *F*. Se ne deduce facilmente allora che anche gli angoli in $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ sono uguali, ma senza l'impiego del v postulato di Euclide non si può affermare che questi due angoli siano retti piuttosto che acuti o ottusi. Saccheri si rende conto della possibilità di utilizzare queste tre ipotesi e ne deduce che, se i due angoli sono rispettivamente retti, ottusi o acuti, il lato *CD* sarà uguale, minore o maggiore del lato *AB* e viceversa. Persuaso della validità del v postulato di Euclide, egli sceglie ovviamente l'ipotesi degli angoli retti; tuttavia, prima di scartare le altre due ipotesi, ne trae numerose conseguenze, ed è in un certo senso questo l'atto di nascita delle geometrie non euclidee.

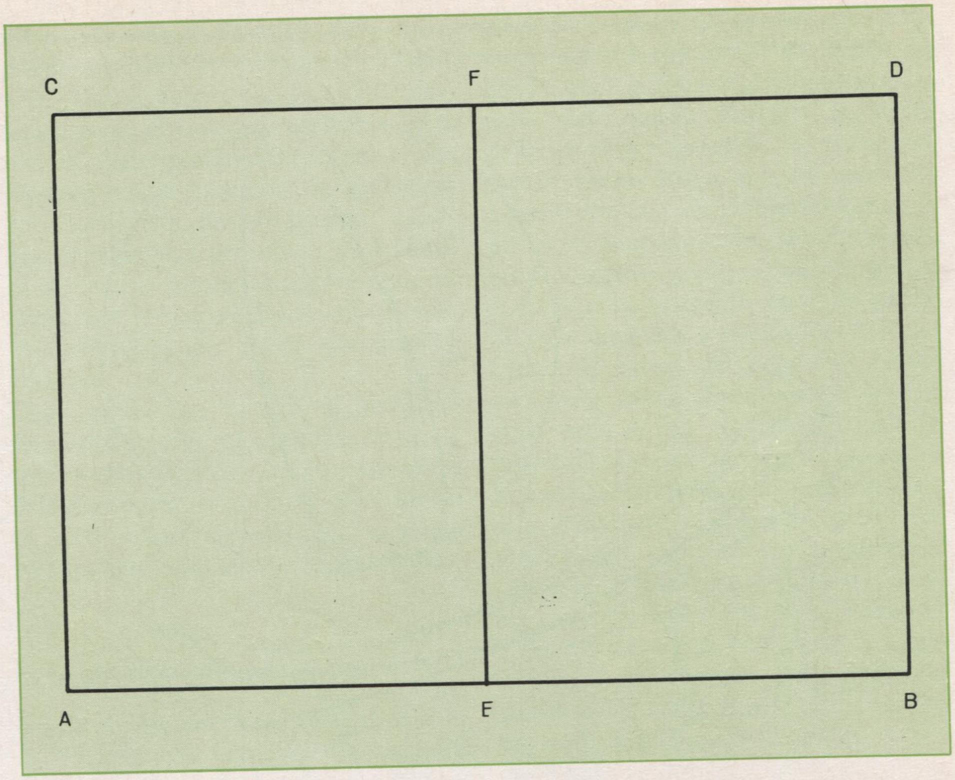


Fig. 4 *Girolamo Saccheri partì anch'esso dal principio di sostituire il quinto postulato di Euclide con un altro più « evidente ». Il suo postulato del rettangolo bisecato da una mediana gli offrì però l'occasione di sviluppare con dei postulati alternativi le due geometrie non euclidee.*

La posizione corretta del problema

Wallis, Saccheri, Lambert e Legendre rientrano in quella categoria di matematici che affronta la questione del v postulato di Euclide semplicemente come un postulato da perfezionare o da dimostrare. Non si sono ancora resi conto che il problema è molto più sottile e che se ne deve ancora ben definire la natura, se cioè si tratti realmente di un postulato dimostrabile oppure di una delle varie alternative al postulato delle parallele, ed è quanto verrà compreso poco più tardi.

Il primo matematico che affrontò il problema con chiarezza fu Karl Friedrich Gauss (1777-1855); ma mentre di solito egli risolveva rapidamente con il suo brillante intuito le varie questioni nelle quali il suo genio si cimentava, alla geometria euclidea, invece, dedicò l'arco di tempo che va dal 1792 al 1797. Durante questo periodo si rese conto della non validità a priori della geometria ordinaria e della conseguente necessità di una scelta eventuale di postulati diversa da quella di Euclide. Costruì perciò — ma questo gli richiese altri trent'anni, cosicché la sua opera si può dire completata solo nel 1830 — una geometria alternativa a quella euclidea, geometria che considerò tanto rivoluzionaria da battezzarla addirittura con il nome di « antieuclidea » (solo più tardi la chiamò « non euclidea »). Il fatto strano è che non pubblicò nulla delle sue ricerche. Se pubblicato, il lavoro di Gauss avrebbe avuto tale rinomanza da offuscare quello dei successivi matematici, Lobačevskij e Bolyai, o forse li avrebbe aiutati a progredire ulteriormente sulla via raggiunta con le sole loro forze. Ambedue partirono dal rigetto aprioristico della necessità della validità intuitiva o fisica della geometria euclidea per costruire delle geometrie nelle quali il postulato delle parallele era sostituito da altri due postulati alternativi: 1) per un punto dato fuori di una retta passano non una ma *due parallele* alla retta data; 2) per un punto preso fuori di una retta non passa *alcuna*

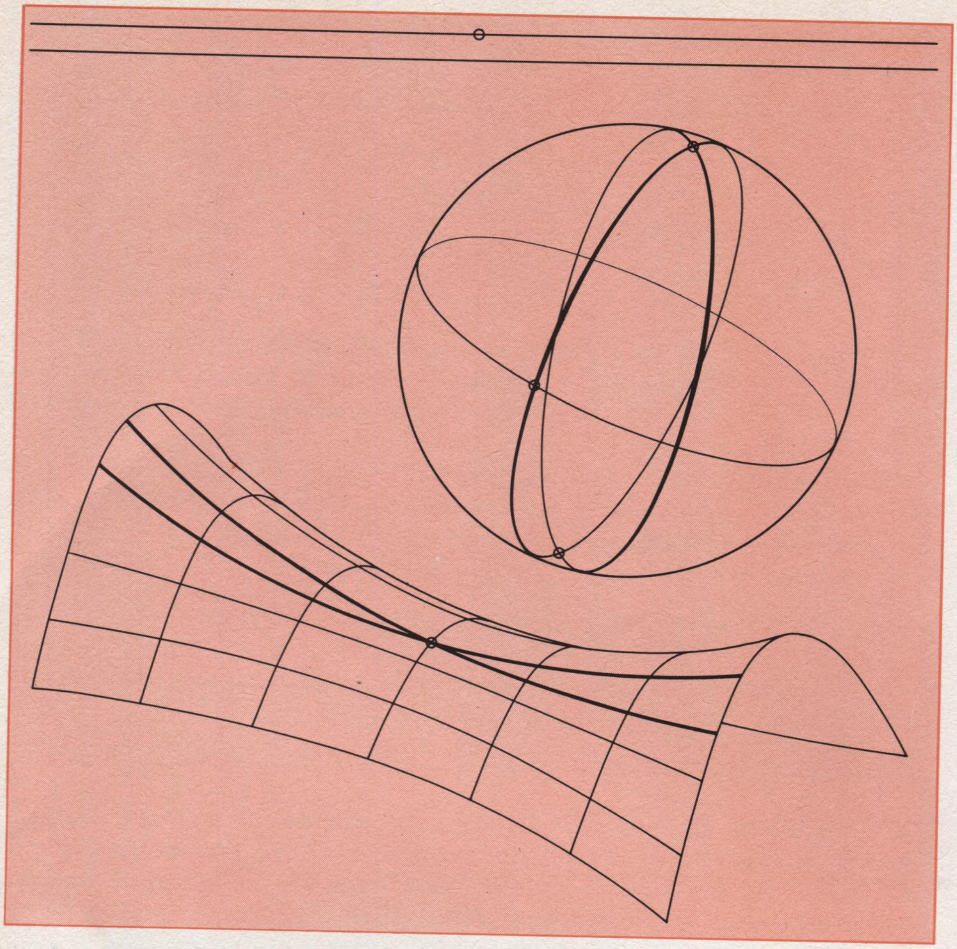


Fig. 5 *La geometria euclidea viene costruita sull'ipotesi (equivalente alla forma del quinto postulato presentato negli Elementi) che da un punto preso fuori da una retta passi una parallela ed una sola alla retta data. Le due geometrie alternative sono quella ellittica in cui per il punto dato non passa alcuna parallela e quella iperbolica in cui per il punto dato ne passano due. Queste ultime due geometrie si possono raffigurare (anche se non del tutto rigorosamente) per mezzo delle geodetiche della sfera (al centro) e dell'iperboloide (in basso).*

retta parallela alla retta data. In questi due casi si hanno in corrispondenza due nuove geometrie non euclidee, la prima detta *geometria iperbolica*, la seconda detta *geometria ellittica.*

Dei due matematici certamente la personalità più brillante fu quella di János Bolyai. Egli era figlio di un matematico, compagno di scuola di Gauss, e si deve a questa relazione, mantenuta anche dopo gli studi, il fatto che il padre di János mandasse all'amico le ricerche del figlio. Gauss rispose che non poteva compiacersene troppo, perché sarebbe stato immodesto in quanto avrebbe lodato contemporaneamente le proprie: egli infatti era già giunto da tempo agli stessi risultati che però non aveva pubblicato. La personalità di Bolyai è davvero straordinaria. Entrato giovanissimo all'Accademia Militare di Vienna, nel 1823 ne uscì sottotenente del Genio, come miglior studente dell'Accademia per tre sue caratteristiche: per l'abilità matematica, il talento nel suonare il violino e la perizia nel tirare di scherma. Sfidò, si dice, tredici ufficiali contemporaneamente, con il patto che ogni due duelli gli lasciassero suonare un pezzo sul suo amato violino e ne uscì vincitore. In confronto a Lobačevskij, Bolyai diede maggior impulso all'analisi dei gruppi di postulati sui quali fondare la nuova geometria, mentre il collega curò in particolare l'estensione degli sviluppi.

Gli indirizzi delle geometrie non euclidee

Non è cosa troppo ardua l'intuizione dei concetti fondamentali delle geometrie non euclidee. Tuttavia, se si sceglie un modello per sostenere quest'intuizione, è necessario conoscerne le limitazioni. Come vediamo nella figura 5, la possibilità di scelta fra i tre tipi di geometria e, di conseguenza, delle alternative al v postulato di Euclide è schematizzata con la geometria del piano, la geometria dell'iperboloide e la geometria dell'elissoide (nel disegno, però, è riportato il caso particolare di una sfera). Nel primo caso è sempre intuitivo che, preso un punto fuori di una retta, esiste una ed una sola parallela alla retta data. Nel caso dell'iperboloide scegliamo come retta data un suo meridiano e vediamo come da un punto fuori di esso esistano due rette (in realtà, due geodetiche della superficie) le quali non incontrano mai la retta data e costituiscono quindi l'equivalente delle due parallele della geometria piana. Nel terzo caso vediamo come, data una retta ed un punto fuori di essa, non passi nessuna parallela alla retta, nel senso che qualunque altra retta tracciamo per questo punto essa finirà per incontrarla in due poli della sfera.

Anche in questo caso abbiamo sostituito delle rette con delle geodetiche. Ciò comunque non significa che la geometria euclidea sia la geometria dell'iperboloide o dell'elissoide, ma che per nostro comodo abbiamo immaginato la situazione che viene a determinarsi fra le geodetiche di queste superfici, quando consideriamo le proprietà del loro incontro o non incontro. Nel caso della geometria piana possiamo immaginare che anche nel piano, così come ce lo raffigura la nostra intuizione fisica, la sostituzione del postulato delle parallele di Euclide con gli altri due postulati alternativi porti a conseguenze facilmente comprensibili grazie al paragone delle geodetiche sulle due superfici illustrate a fianco. È facile capire allora quanto deriva dallo sviluppo di queste geometrie. Nel caso della geometria ellittica, se si considerano triangoli via via più grandi, la somma dei loro angoli interni (che per triangoli infinitesimi è uguale a π) aumenta, cosicché non è possibile accrescere le dimensioni di un triangolo mantenen-

dolo simile al dato, il che non deve in fondo meravigliare. Infatti, se si abbandona il postulato delle parallele di Euclide, si nega anche la forma, equivalente a quella di Euclide, datagli da Wallis, cioè il postulato può essere sostituito con quello secondo il quale di una figura geometrica qualunque, in particolare, di un triangolo, si deve sempre poter costruire una figura simile e più grande. Avendo negato il postulato di Euclide e quindi anche la forma equivalente di Wallis, non ci si deve meravigliare di non poter più costruire figure (in particolare, triangoli) simili. Analogamente, nella geometria non euclidea iperbolica, aumentando di dimensioni il triangolo, diminuisce il valore della somma dei suoi angoli interni.

La costruzione delle geometrie non euclidee può essere compiuta seguendo differenti indirizzi, che è necessario conoscere quando ci si inoltra nella trattatistica relativa a questo argomento e che in breve sono:

a) *indirizzo elementare*, secondo cui le geometrie non euclidee sono costruite attraverso la critica della scelta dei postulati della geometria, in modo da suggerire le alternative al postulato di Euclide; fu seguito da Gauss, Lobačevskij, Bolyai;

b) *indirizzo differenziale*, fu seguito da B. Riemann; poco tempo prima Gauss aveva costruito quella che oggi chiamiamo la « geometria differenziale delle superfici », pubblicata nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Mentre la teoria gaussiana si estendeva soltanto alle figure tracciate sulle superfici curve (cioè, spaziali), Riemann la estese a varietà a tre e più dimensioni, rendendola così utile alla trattazione delle geometrie non euclidee;

c) *indirizzo gruppale*, che deriva dallo studio dei movimenti di simmetria nello spazio di particolari corpi solidi; queste operazioni costituiscono dei gruppi e le loro proprietà e di conseguenza le caratteristiche di questi gruppi dipendono dal fatto che si scelga una geometria euclidea oppure no; di qui un nuovo indirizzo nella trattazione delle nuove geometrie;

d) *indirizzo proiettivo*, cioè suggerito dall'impiego della geometria proiettiva, la quale, infatti, si può costruire prescindendo completamente dalle proprietà metriche delle figure; F. Klein e A. Cayley hanno per l'appunto mostrato come si potessero estendere certi metodi della geometria proiettiva per renderla adatta a trattare le geometrie non euclidee e furono proprio questi due matematici a proporre i tre termini di *geometria iperbolica* e *geometria ellittica* per le non euclidee e di *geometria parabolica* per quella strettamente euclidea.

Oggi questi vari metodi di presentazione hanno solo un carattere storico e trattazioni superiori e più complete dell'argomento esigono la conoscenza di tutti questi indirizzi che vengono fusi insieme nella tecnica di trattazione.

La geometria dello spazio fisico

Verso la fine del '700, quando ancora si riteneva che la geometria euclidea fosse la geometria assoluta, aderente alle proprietà dello spazio fisico, si pensò anche che soltanto una perfetta conoscenza di queste potesse aiutare nella scelta fra le geometrie euclidea e non euclidee che si prospettavano ai matematici. Poiché si sapeva che una delle conseguenze delle geometrie non euclidee sarebbe stata quella di mostrare per triangoli molto grandi uno scostamento dal valore π nella somma degli angoli interni, si credette che un criterio di scelta potesse essere proprio quello di misurare il valore della somma degli angoli interni di un triangolo di dimensioni molto grandi, così da poter misurare dal suo *eccesso* o *difetto sferico* la validità dell'una piuttosto che dell'altra geometria. In realtà, queste misure furono tentate con triangoli molto grandi sulla superficie del nostro pianeta: ovviamente, si trattava di triangoli piani e non di triangoli che seguissero la curvatura della superficie terrestre, la quale avrebbe certo mostrato un eccesso sferico. Tuttavia queste misure, soprattutto per la piccolezza dei triangoli, si rivelarono infruttuose.

Oggi la questione della scelta del tipo di geometria si presenta oziosa dal punto di vista matematico ed invece molto importante da quello fisico. Nella pratica si sa molto bene che la geometria euclidea è più che sufficiente per la trattazione dei problemi della meccanica ordinaria, soprattutto della meccanica microscopica, ma anche di quella macroscopica che si sviluppa su scala astronomica. Tuttavia la teoria della relatività generale fa prevedere che lo spazio fisico non sia euclideo, a meno che non sia perfettamente vuoto, cioè completamente privo di materia. Laddove questa esiste, lo spazio si curva e la geometria passa da quella di tipo euclideo a quella di tipo ellittico. Il valore del raggio di curvatura dello spazio dipende dalla densità della materia nel suo interno; questa proprietà è stata misurata calcolando la curvatura dei raggi di luce che passano vicino ad una grossa massa gravitante, per esempio, quella del Sole. Come si sa, questo è il famoso esperimento realizzato per la prima volta nel 1919 dal fisico E.A. Eddington, il quale misurò lo spostamento dalla posizione consueta di stelle che si proiettavano contro il Sole durante la celebre eclisse di Sobral.

Poiché, dunque, in prossimità di un corpo gravitante come il Sole lo spazio è fortemente curvo e si sa che tutto l'Universo finora esplorato è ripieno, di materia, sia pure con una densità molto bassa, se ne può dedurre che tutto lo spazio conosciuto debba essere curvo. Tuttavia, varie cause, come l'oscuramento intergalattico e la potenza ancora limitata dei radiotelescopi in grado di superarlo, inducono a concludere che non si è ancora riusciti a compiere l'esperimento decisivo di osservare uno stesso astro dalla direzione principale che ci congiunge ad esso oppure da quella diametralmente opposta. Il problema di una scelta fra i vari tipi di geometria non si pone più per il matematico che vede in essi tre alternative assolutamente equivalenti. Per il fisico, invece, è ancora aperto il problema della determinazione del tipo di geometria che meglio rappresenti le proprietà dello spazio fisico.

BIBLIOGRAFIA:

Articolo sulle geometrie non euclidee e non archimedee, « Enciclopedia delle matematiche elementari », Hoepli, Milano.

Fuchs, *Matematica moderna illustrata*, Rizzoli, Milano 1971.

Hilbert D., *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano 1971.